



## MODELO NUMÉRICO PARA SIMULAR UMA SONDA CRIOGÊNICA

**Jorge Roberto Pimentel**

Universidade Estadual Paulista, Departamento de Física  
Cx.P.178 – 13500-970 – Rio Claro, SP, Brasil

**Resumo.** O comportamento de uma sonda criogênica foi simulado usando-se um modelo numérico unidimensional, baseado num método implícito de aproximação por diferenças finitas. O modelo foi avaliado comparando-se a localização da interface sólido-líquido, prevista por uma solução analítica disponível na literatura, com os resultados numéricos, mostrando muito boa concordância entre si. Determinou-se a extensão da área congelada e a distribuição de temperaturas, numa amostra hipotética de tecido biológico, para temperaturas da criossonda iguais a  $-79\text{ }^{\circ}\text{C}$  (gelo seco) e  $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$  (nitrogênio líquido) e temperaturas do tecido  $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , admitindo-se que as propriedades termofísicas dependessem da temperatura. Em relação à solução analítica, o modelo numérico apresenta as vantagens de permitir alterações nas condições de contorno e nas dimensões da amostra e considera que as propriedades termofísicas envolvidas no processo sejam dependentes da temperatura, bem como admitir diferentes composições para o tecido biológico.

**Palavras-chave:** Mudança de Fase, Solidificação, Criogenia

### 1. INTRODUÇÃO

A destruição de determinadas áreas de tecido afetado por algum tipo de anomalia pode ser feita, por exemplo, através do resfriamento ou congelamento de suas células, mantendo a área selecionada em contato com uma sonda criogênica. Esse procedimento tipifica uma situação de mudança de fase para a qual é importante ser conhecida a influência dos parâmetros envolvidos na distribuição de temperaturas e na localização da frente de congelamento, de forma que possam ser previstos e evitados danos em células sadias vizinhas.

Os problemas de mudança de fase são, em geral, não lineares, admitindo soluções explícitas exatas, obtidas pelo método de similaridade, somente para alguns casos unidimensionais onde as temperaturas iniciais e de contorno e as propriedades termofísicas são constantes, conforme Carslaw & Jaeger (1959) e Crank (1984). Nas situações em que as condições de contorno descrevem comportamentos mais próximos da realidade ou quando mais de uma fase está presente, as soluções disponíveis são sempre aproximadas.

Vários autores tem aplicado técnicas numéricas similares à utilizada neste trabalho para estudar a mudança de fase em sólidos, líquidos e meios porosos saturados. Entre eles Murray & Landis (1959), Chellaiah & Viskanta (1988), Vafai & Tien (1989), Chellaiah & Viskanta (1990) e Zhang & Nguyen (1991). Seus resultados, quando comparados com soluções analíticas ou resultados experimentais disponíveis mostram muito boa concordância, indicando

que a utilização de modelos numéricos não sofisticados para tratar problemas de mudança de fase é uma alternativa interessante que não deve ser desconsiderada.

Neste trabalho, são apresentados e discutidos os resultados iniciais da aplicação de um modelo numérico unidimensional puramente condutivo, de aproximação por diferenças finitas, para simular o comportamento de uma criossonda plana. Discutem-se os efeitos causados na distribuição interna das temperaturas numa amostra hipotética de tecido biológico, devido a diferentes temperaturas da criossonda e do tecido, assim como a variações nas propriedades termofísicas com a temperatura. Ressalta-se que o modelo numérico apresenta vantagens em relação a uma solução analítica disponível na literatura, podendo tratar, por exemplo, diferentes condições de contorno, admitir variações das propriedades termofísicas com a temperatura e simular diferentes tecidos biológicos.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema foi idealizado considerando-se uma amostra hipotética de tecido biológico semi-infinita, plana e estando à temperatura inicial  $T_i$ . A composição do tecido e o calor resultante do metabolismo celular e da circulação sanguínea não foram considerados. O tecido biológico foi tratado como estando saturado e sendo constituído essencialmente de água, embora o modelo numérico permita considerar uma composição diferente, por exemplo, água com outro material do qual se conheçam os valores das propriedades termofísicas. Num determinado instante, uma criossonda impõe no contorno  $x=0$  da amostra uma temperatura constante  $T_0$ , menor que a temperatura de solidificação do tecido,  $T_m$ . Tem início, então, a formação de uma interface que se movimenta na direção positiva de  $x$  e cuja posição,  $S(t)$ , é proporcional ao tempo. A interface separa regiões com propriedades termofísicas diferenciadas e temperaturas  $T_L(x,t)$  para o líquido e  $T_S(x,t)$  para o sólido, que são funções da posição e do tempo. Na região líquida, considerou-se a condutividade térmica  $k_L(T)$  dependente da temperatura, enquanto que a densidade  $\rho_L$  e o calor específico  $c_{pL}$  foram considerados constantes. Para a região sólida, admitiu-se a densidade  $\rho_S$  como tendo valor constante e a condutividade térmica  $k_S(T)$  e o calor específico  $c_{pS}(T)$ , variando com a temperatura. Na fig. 1 estão representadas a geometria e as variáveis utilizadas na formulação do problema.

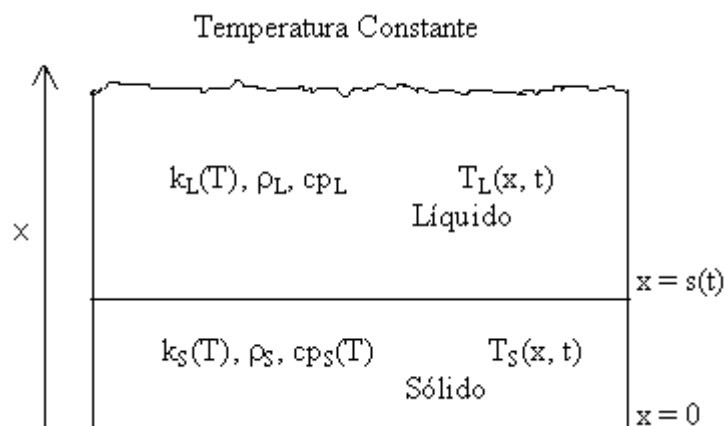


Figura 1 - Geometria e variáveis utilizadas na formulação do problema.

### 3. EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

O problema foi tratado, de forma aproximada, como sendo equivalente à solidificação de uma placa plana semi-infinita onde duas fases incompressíveis, sólida e líquida, coexistem. A condição semi-infinita foi introduzida usando-se o artifício de considerar uma placa de espessura,  $d$ , relativamente grande quando comparada com as dimensões envolvidas e mantendo sempre no contorno  $x=d$  o valor da temperatura inicial  $T_i$ .

Admitiu-se a condução como sendo o mecanismo de transferência de calor predominante em ambas as fases e supôs-se que o sólido não apresenta movimento macroscópico. Dessa forma, as equações diferenciais e respectivas condições de contorno, para as regiões sólida e líquida resultaram em:

Região sólida ( $0 \leq x \leq t$ )

$$\frac{\partial T_S}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2}, \quad t > 0 \quad (1)$$

Nesta equação,  $\alpha_s$  representa a difusividade térmica do sólido. No contorno  $x=0$ , a temperatura foi considerada constante e igual à temperatura da criossonda  $T_o$ , isto é:

$$T_S(x,t) = T_o; \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

Região líquida ( $S(t) \leq x \leq d$ )

$$\frac{\partial T_L}{\partial t} = \alpha_L \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2}, \quad t > 0 \quad (3)$$

Onde  $\alpha_L$  é a difusividade térmica do líquido. Para tratar a amostra como semi-infinita, no contorno  $x=d$  considerou-se a seguinte condição:

$$T_L(x,t) = T_i; \quad x = d, \quad t > 0 \quad (4)$$

Interface sólido-líquido

A energia necessária para provocar a mudança de fase no material flui através da interface que tem sua posição,  $S(t)$ , alterada à medida que o processo transcorre. A conservação da energia aplicada na interface, estabelece que a diferença entre os fluxos de calor das duas regiões deve igualar-se à taxa de calor liberado durante o processo, por unidade de área. Admitiu-se o fluxo de calor, através das fases sólida e líquida, como sendo puramente condutivo com a interface movendo-se na direção positiva de  $x$ , resultando na seguinte equação:

$$k_S \frac{\partial T_S}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} = \rho L \frac{dS(t)}{dt}, \quad x = S(t) \quad (5)$$

onde o termo

$$\frac{dS(t)}{dt} = - \frac{\partial T_S / \partial t}{\partial T_S / \partial x} = - \frac{\partial T_L / \partial t}{\partial T_L / \partial x} \quad (6)$$

responsável pela não linearidade da equação (5), representa a velocidade da interface e  $L_S$  o calor latente de solidificação.

Ainda na interface, a continuidade da temperatura requer que as temperaturas das fases sólida e líquida sejam iguais à temperatura de mudança de fase, ou seja:

$$T_S(x,t) = T_L(x,t) = T_m, \quad x = S(t) \quad (7)$$

#### 4. MODELO NUMÉRICO

Para solucionar as equações diferenciais anteriores, utilizou-se um modelo numérico baseado no método implícito de diferenças finitas de Crank & Nicolson (1947). A amostra unidimensional foi dividida em uma malha fixa de pontos nodais e as equações diferenciais discretizadas, aproximando-se as derivadas nos pontos nodais por expansões em séries de Taylor em torno desses pontos. As equações algébricas resultantes para cada ponto da malha, foram expressas no formato sugerido por Patankar (1980). A matriz obtida com os coeficientes foi diagonalizada e as equações solucionadas usando-se um algoritmo (TDMA), fundamentado no método de eliminação de Gauss. Para resolver o algoritmo foi elaborado um programa em linguagem C. Utilizou-se uma malha com 31 pontos nodais e degrau de tempo igual à 2,5 s. Considerou-se a dimensão da amostra  $d = 0,20$  m e admitiu-se o valor  $S(0) = 0,001$  m para a posição inicial da interface.

Informações sobre como as derivadas espaciais e temporais das equações diferenciais foram discretizadas e o formato em que foram expressas para a obtenção dos coeficientes usados, a adimensionalização utilizada para as temperaturas, o procedimento para otimizar o número de pontos da malha e o degrau de tempo, o formato da expressão usada para representar a posição da interface (que pode não coincidir com algum ponto da malha), bem como a estrutura de um programa em linguagem C adequado para resolução desse tipo de problema, podem ser encontradas no trabalho de Pimentel (1995). A solução das equações possibilitou determinar, para qualquer instante de tempo, a posição da interface sólido-líquido  $S(t)$ , bem como a distribuição de temperaturas para as regiões sólida  $T_S(x,t)$  e líquida  $T_L(x,t)$ .

#### 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Inicialmente, a adequação do modelo numérico foi testada comparando-se a posição da interface com o tempo, determinada numericamente e usando-se os mesmos valores para a temperatura e propriedades termofísicas, utilizados por Alexiades & Solomon (1993) em sua solução analítica. A comparação entre o resultado numérico e o analítico mostra excelente concordância entre ambos, conforme mostrado na fig.2.

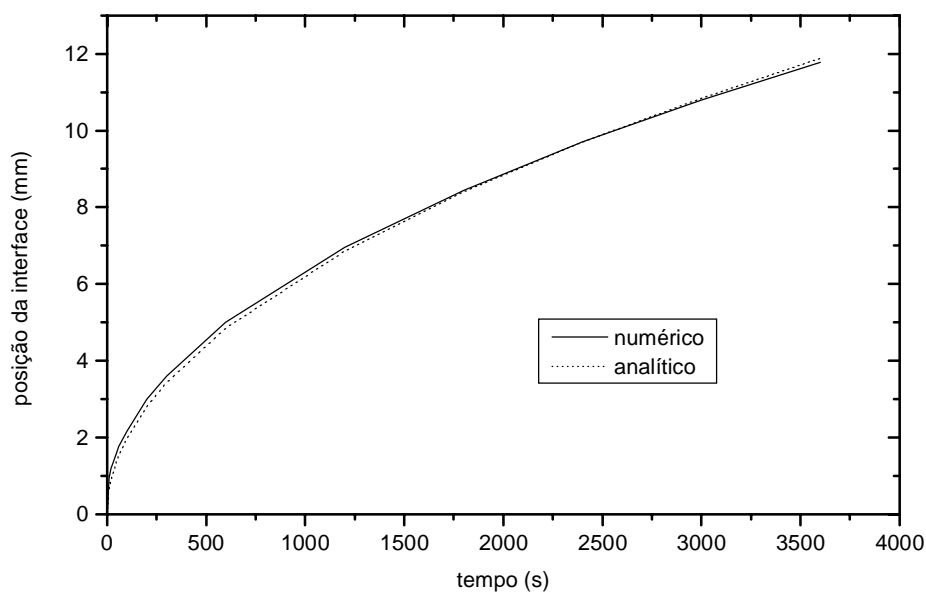


Figura 2 – Posição da interface sólido-líquido com o tempo. Comparação entre os resultados analítico e numérico.

A influência da temperatura nas propriedades termofísicas foi verificada fazendo-se simulações numéricas, utilizando-se os valores e expressões relacionadas na tabela 1.

Tabela 1–Propriedades termofísicas para a água e gelo, conforme Alexiades & Solomon (1993).

Água	Gelo
$\rho = 1\,000\text{ kg/m}^3$	$\rho = 920\text{ kg/m}^3$
$C_p = 4187\text{ J/kgK}$	$C_p = 7,16 \times 10^{-3}T + 0,14\text{ J/kgK}$
$k = 1,70 \times 10^{-6}T + 1,02 \times 10^{-4}\text{ W/mK}$	$k = 5,98 \times 10^{-6}(273-T)^{1,156}\text{ W/mK}$
$L = 333\,730\text{ J/kg}$	$L = 333\,730\text{ J/kg}$

A temperatura da amostra de tecido biológico foi considerada constante e igual a 37 °C e adotaram-se dois valores para a temperatura da criossonda –79 °C (gelo seco) e –196 °C (nitrogênio líquido), supondo-se a duração do processo igual a 3 600 segundos. A fig. 3 mostra os resultados obtidos para a posição da interface sólido-líquido.

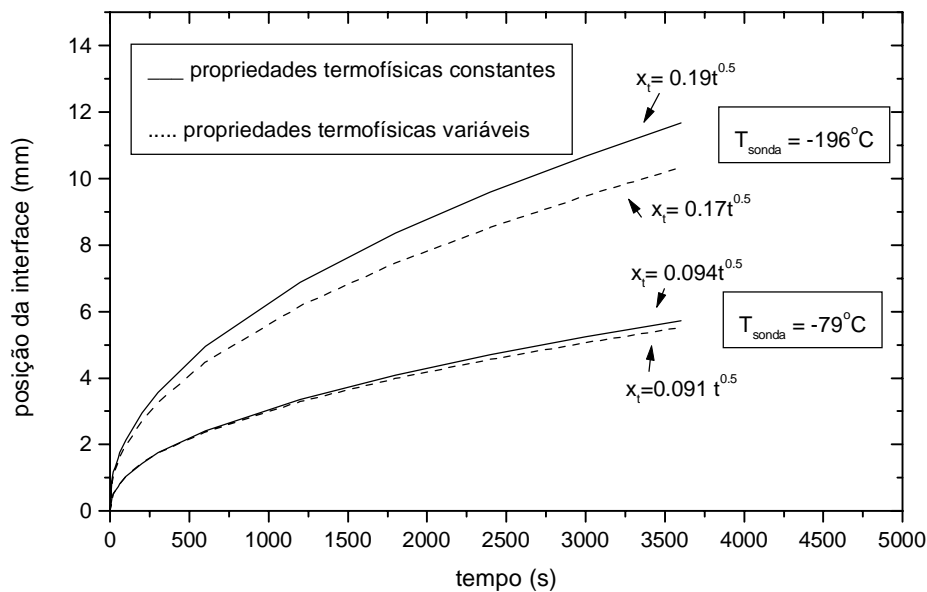


Figura 3 – Variação da posição da interface com o tempo, até 3 600s.  
 $T_{sonda} = -79^{\circ}C$  e  $-196^{\circ}C$ ,  $T_{tecido} = 37^{\circ}C$ .

Os resultados mostraram que a posição da interface e, conseqüentemente, a espessura da camada de sólido formada, é proporcional à raiz quadrada do tempo, concordando com os resultados clássicos conhecidos da literatura. Mostram, também, que a utilização de propriedades termofísicas variáveis com a temperatura leva a menores espessuras para a região solidificada. Para a criossonda operando a  $-79^{\circ}C$ , a influência dos valores das propriedades termofísicas é pequena. As interfaces são descritas pelas expressões  $S(t) = 0,094t^{0.5}$  (propriedades termofísicas constantes) e  $S(t) = 0,091t^{0.5}$  (propriedades termofísicas variáveis), o que representa uma diferença aproximada de 3% entre elas.

Com a diminuição da temperatura da criossonda para  $-196^{\circ}C$ , verifica-se uma influência maior dos valores das propriedades termofísicas na localização da interface. Elas são descritas por  $S(t) = 0,19t^{0.5}$  (propriedades termofísicas constantes) e  $S(t) = 0,17t^{0.5}$  (propriedades termofísicas variáveis) diferindo, aproximadamente, 11% entre si.

As distribuições de temperaturas na amostra após 3 600 segundos, obtidas para as mesmas condições anteriores, estão representadas na fig. 4. Verifica-se que os valores previstos para as regiões de sólido ( $T < 0^{\circ}C$ ) e de líquido ( $T > 0^{\circ}C$ ) são maiores quando se considera a dependência das propriedades termofísicas com a temperatura. Essa diferença é mais acentuada quando a temperatura da criossonda é igual a  $-196^{\circ}C$ . Observa-se, ainda, que uma menor temperatura de operação da criossonda diminui a temperatura de uma extensão maior da amostra. Para a criossonda a  $-196^{\circ}C$ , a região em que a temperatura permanece constante e igual a  $37^{\circ}C$  começa no ponto 23 da grade numérica, enquanto que para a criossonda a  $-79^{\circ}C$  inicia-se no ponto 13.

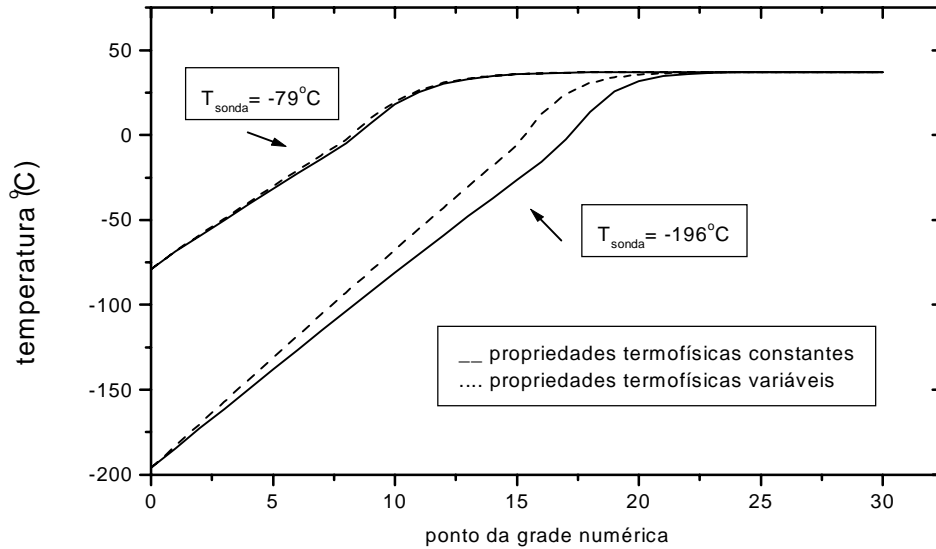


Figura 4 – Distribuição de temperaturas, após 3 600 s  
 $T_{\text{sonda}} = -79\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{\text{tecido}} = 37\text{ }^{\circ}\text{C}$

A influência da temperatura inicial do tecido biológico no processo foi simulada admitindo-se que a amostra estivesse às temperaturas de  $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  e que a criossonda operasse a  $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $-79\text{ }^{\circ}\text{C}$ , durante 3 600 s. Considerou-se que as propriedades termofísicas variassem com a temperatura. Os resultados dessas simulações estão apresentados na fig. 5.

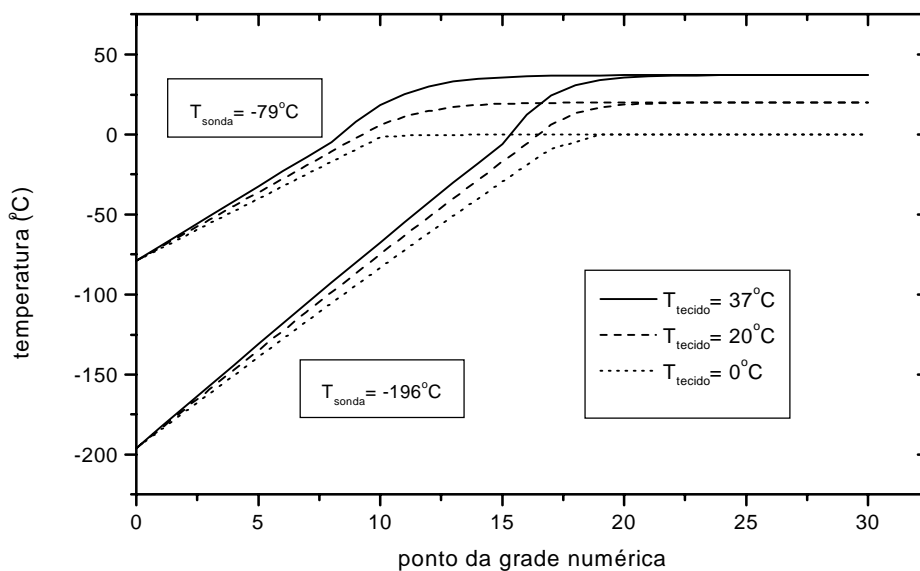


Figura 5. – Distribuição de temperaturas, após 3 600 s  
 $T_{\text{sonda}} = -79\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{\text{tecido}} = 37\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$

Para as duas temperaturas da criossonda, verifica-se que as maiores temperaturas interiores são obtidas quando o tecido inicialmente está a 37 °C. Isto significa que para se atingir um determinado valor de temperatura (por exemplo, -25 °C), compromete-se uma extensão menor de tecido quando se utiliza a criossonda menos fria com o tecido estando à temperatura normal.

Este resultado pode ser melhor visualizado na fig. 6, onde a evolução da temperatura num ponto fixo da amostra a 37 °C (correspondente a 1/3 da grade numérica) foi acompanhada durante 3 600 s.

Comparando-se os resultados para as duas criossondas, verifica-se que aquela funcionando a -79 °C leva a uma variação muito menos acentuada na temperatura do que aquela a -196 °C.

Efetuando-se um ajuste nos dados referentes às duas curvas, obtém-se que a criossonda funcionando a -79 °C gera a variação exponencial  $T(t)=47-[10 \exp(t/2116)]$ , muito menos acentuada que a variação  $T(t)=-92+[87\exp(-t/1678)]$ , produzida pela criossonda operando a -196 °C.

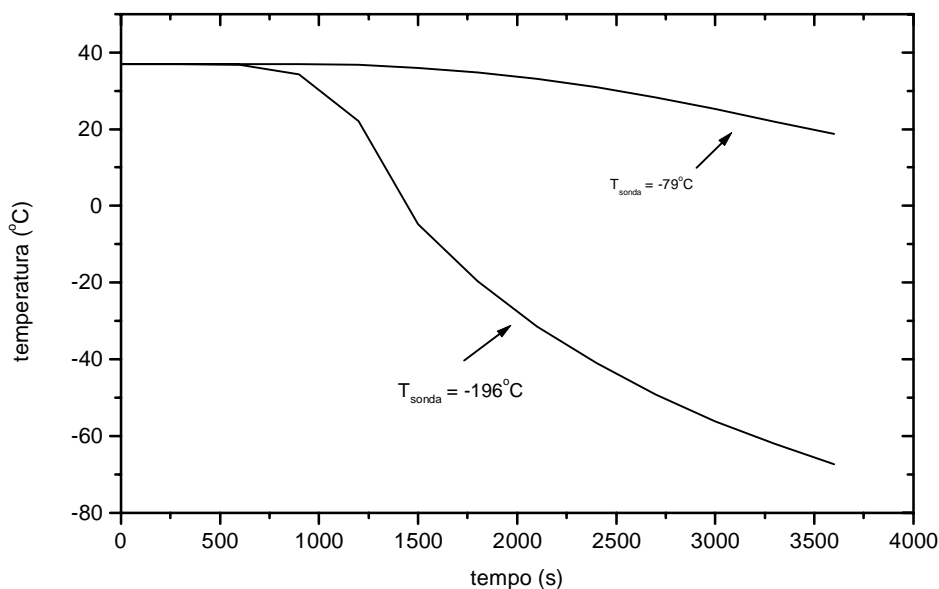


Figura 6 – Acompanhamento da mudança de temperatura no ponto correspondente a 1/3 da grade, durante 3 600 s.  $T_{sonda} = -79\text{ °C}$  e  $-196\text{ °C}$  ,  $T_{tecido} = 37\text{ °C}$

## 6. CONCLUSÕES

A utilização do modelo numérico proposto para simular o comportamento de uma criossonda atuando em tecido biológico, mostra que é possível obter informações acerca da distribuição de temperaturas e extensão da região que é afetada pelas baixas temperaturas. O modelo também permite fazer estimativas e previsões levando-se em conta diferentes temperaturas para a criossonda e para o tecido.

Comparado com a solução analítica de Alexiades & Solomon (1993), o modelo apresenta vantagens, entre as quais a possibilidade de serem introduzidas modificações nas condições de contorno, bem como ser considerada a dependência da temperatura nas propriedades



termofísicas. Além disso, permite simular o tecido como um meio composto de água e outro material, desde que se conheçam suas propriedades termofísicas.

## 8. REFERÊNCIAS

- Alexiades, V. & Solomon, A. D., 1993, *Mathematical Modeling of Melting and Freezing Process*, Hemisphere, Washington.
- Carslaw, H. S. & Jaeger, J. C., 1959, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, London.
- Chellaiiah, S. & Viskanta, R., 1988, Freezing of saturated and superheated liquid in porous media, *Int.J.Heat Mass Transfer*, vol.31, pp.321-330.
- Chellaiiah, S. & Viskanta, R., 1990, Natural convection melting of a frozen porous medium, *Int.J.Heat Mass Transfer*, vol.33, pp.887-899.
- Crank, J., 1984, *Free and Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, London.
- Crank, J. & Nicolson, P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, *Proc.Camb.Phil.Soc.*, vol.43, pp 50-67.
- Murray, W.D. & Landis, F., 1959, Numerical and machine solutions of transient heat conduction problems involving melting or freezing, *Trans.ASME*, vol 81, pp. 106-112.
- Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington.
- Pimentel, J.R., 1995, Tese de Doutorado, Contribuição ao estudo da mudança de fase em meios porosos planos saturados com líquido, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.
- Vafai, K. & Tien, H.C., 1989, A model for coupled heat and moisture transfer during soil freezing, *Canadian Geotech.J.*, vol.15, pp.1261-1277.
- Zhang, X & Nguyen, T.H., 1991, Melting of ice in a porous medium heated from below, *Int.J.Heat Mass Transfer*, vol.34, pp. 389-395.

## NUMERIC MODEL TO SIMULATE A CRYOGENIC PROBE

**Abstract.** A one-dimensional numeric model is proposed to simulate the operation of a cryogenic probe on temperatures  $-79\text{ }^{\circ}\text{C}$  (dry ice) and  $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$  (liquid nitrogen). The model is based on implicit finite difference approach method and was used to calculate the extension of the frozen area and the temperature distribution in a hypothetical tissue sample with temperatures equal to  $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  and  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . The numeric result for the interface solid-liquid location compared with an analytical solution shows good agreement. Other results are presented and discussed considering that thermophysical properties are temperature dependent. The numerical model compared to analytical solutions presents the advantages of allowing alterations in (i) the boundary conditions, (ii) thermophysical temperature dependence properties, (iii) sample dimensions and (iv) composition of the tissue.

**Key-words:** Phase change, Solidification, Cryogenics